Exercice 4 :

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties :

$I = \int_1^a x^2 lnx\, dx$ pour $a \geq 1$, $J = \int_0^a x^2 \cos x\ dx$ pour $a \epsilon \mathbb{R}$.

$K = \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$, $L = \int_0^a e^{\alpha x} \cos(\beta x)\ dx$ *et* $M = \int_0^a e^{\alpha x} \sin(\beta x)\ dx$

Ex 4

calculons I, en utilisant une intégration par parties

posons :

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

On aboutit à :

$$I = \left[\frac{x^3}{3} \ln x\right]_1^a - \int_1^a \frac{x^2}{3} dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^a$$

Par suite,

$$I = \frac{a^3}{3}\ln a - \frac{a^3}{9} + \frac{1}{9}$$

Pour J, on a :

Ex 4

Calculons J en utilisant une intégration par parties :

On a : $J = \int_0^a x^2 \cos x \, dx$

posons :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = \sin x \end{cases}$$

Par suite :

$$J = \left[x^2 \sin x \right]_0^a - \int_0^a 2x \sin x \, dx$$

En effectuant une deuxième intégrations par parties, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = 2x \\ v'(x) = \sin x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = 2 \\ v(x) = -\cos x \end{cases}$$

et on trouve :

$$\int_0^a 2x\sin x\,dx = \left[-2x\cos x\right]_0^a + 2\int_0^a \cos x\,dx$$

$$= \left[-2x\cos x + 2\sin x\right]_0^a$$

Finalemnt,

$$J = \left[x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x\right]_0^a$$

$$= a^2\sin a + 2a\cos a - 2\sin a$$